

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=(x^2+\alpha)\ln x$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της παραγώγου f' της f έχει σημείο καμπής πάνω στον άξονα $x'x$.

- α)** Να δείξετε ότι $\alpha = -1$.
- β)** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και το σύνολο τιμών της.
- γ) i.** Να βρείτε τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(f\circ g)(x)=\left(1-\frac{1}{e^{2x}}\right)x$.
- ii.** Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x\rightarrow 0}(f\circ g)(x)$ ημ $\left(\frac{1}{g(x)-1}\right)$.
- δ) i.** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδική εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $y = x$, σε σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, \sqrt{e})$.
- ii.** Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) - x \geq f(x_0) - x_0$.
- ε)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = \frac{6 \ln x}{x}$.