

Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} -x(\alpha - \ln x)^2 & , x > 0 \\ \sqrt{-x} & , x \leq 0 \end{cases}$, $\alpha > 0$.

Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $(\alpha, -\alpha)$.

- α)** Να δείξετε ότι $\alpha = 1$.
- β)** Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 .
- γ) i.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = 4e^x - 4xe^x + 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και ισχύει ότι $\varphi(2) < 0$.
- ii.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(-1, f(-1))$ επανατέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία.
- δ) i.** Να βρείτε την αρχική συνάρτηση F της συνάρτησης f η οποία διέρχεται από το σημείο $\left(1, \frac{5}{4}\right)$.
- ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την εφαπτομένη της σε σημείο με αρνητική τετμημένη η οποία διέρχεται από το τοπικό της μέγιστο.