

Δίνεται η συνάρτηση  $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$  με  $f(x)=\alpha x+\beta+\frac{1+\ln x}{\sqrt{x}}$ ,  $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$ .

Η ευθεία  $(\varepsilon): y=x-1$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ .

- α)** Να δείξετε ότι  $\alpha=1$  και  $\beta=-1$ .
- β)** **i.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.  
**ii.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .
- γ)** Έστω  $E(\lambda)$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την ευθεία  $(\varepsilon)$  και τις ευθείες  $x=\frac{1}{e}$  και  $x=\lambda$  με  $0<\lambda<\frac{1}{e}$ .
- i.** Να δείξετε ότι  $E(\lambda)=\frac{4}{\sqrt{e}}-2\sqrt{\lambda}+2\sqrt{\lambda}\ln\lambda$ .
- ii.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x\rightarrow 0^+} E(\lambda)$ .