

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = (x + \alpha - 1) \cdot (\alpha - e^{-x})$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Η  $f$  παρουσιάζει ακρότατο πάνω στον άξονα  $x'x$ .

- α)** Να δείξετε ότι  $\alpha = 1$ .
- β)** Να εξετάσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- γ)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $yy'$  και την εφαπτομένη της στο σημείο της  $A(-1, f(-1))$ .
- δ) i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$  με  $g(x) = -\ln x$ .
- ii.** Να δείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $e^x > x$ ,  $e^x > x^2$  και  $(2-x)e^{-x} < \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ .
- iii.** Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f \circ g$  έχουν ακριβώς δύο σημεία τομής με τετμημένες  $0 < x_1 < 1$  και  $x_2 > 1$ .