

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{(x-1)\ln(1-x)} & , x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \\ 1 & , x = 0 \end{cases}.$$

- α)** **i.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $0$ .
- ii.** Να δείξετε ότι  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .
- β)** **i.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $f$ .
- ii.** Να εξετάσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- γ)** **i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να δείξετε ότι βρίσκεται κάτω από αυτήν.
- ii.** Έστω  $E(\lambda)$  το εμβαδόν το χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα

$$x'x \text{ και την ευθεία } x = \lambda. \text{ Να δείξετε ότι } \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda) \geq \frac{(e-1)^2}{2e}.$$

- δ)** Η τετμημένη  $x_0$  ενός σημείου  $M(x_0, y_0)$  της γραφικής παράστασης της  $f$  κινείται με ρυθμό  $1 \text{ cm/s}$ . Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $M(x_0, y_0)$  τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $yy'$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου  $AOB$  όταν  $x_0 = 1$ .