

$$\text{Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha + \ln(x+1)}{e^x} & , x \geq 0 \\ \frac{\beta}{x^2+1} & , x < 0 \end{cases}, \alpha, \beta \neq 0.$$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0.

- α)** Να δείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.
- β)** Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και να δείξετε ότι έχει δύο σημεία καμπής $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$, με $x_1 < 0$ και $x_2 > 0$, να βρείτε το x_1 και να δείξετε ότι $x_2 \in (1, 0)$.
- γ)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\Gamma(x_0, f(x_0))$ με $x_0 < 0$, η οποία διέρχεται από το ολικό της μέγιστο.
- δ)** Να δείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο της $\Delta(\xi, f(\xi))$ με $\xi > 0$ τέτοια, ώστε $(\varepsilon) \perp (\zeta)$.
- ε)** Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες $x'x$ και yy' και την ευθεία $x = \lambda$ με $\lambda > 0$. Να δείξετε ότι $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) \leq 2$.