

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + \alpha) & , x < 0 \\ x \ln(x + \beta) & , x \geq 0 \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- α)** Να δείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.
- β)** Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- γ)** Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- δ)**
- i.** Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(1, f(1))$.
 - ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία (ε) και τον άξονα yy' .
 - iii.** Να δείξετε ότι για την τετμημένη a του σημείου τομής της (ε) με τον άξονα $x'x$ ισχύει ότι $a < \frac{1}{2}$.
- ε)** Έστω η συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)$.
- i.** Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της g^{-1} .
 - ii.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των g και g^{-1} .