

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{\alpha}{x-1} + \beta \cdot \ln(x-1)$  όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Η γραφική παράσταση της  $f$  έχει μοναδική οριζόντια εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) στο σημείο της  $(x_0, x_0 - 1)$  και μοναδικό σημείο καμπής με τετμημένη  $x_0 + 1$ .

- α)** Να δείξετε ότι  $x_0 = 2$  και  $\alpha = \beta = 1$ .
- β)** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- γ)** Έστω  $F$  μια αρχική της  $f$  με  $F(2) = 0$ .
- i.** Να βρείτε τη συνάρτηση  $g : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = F(x) + x$ .
- ii.** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $g$  έχει μοναδική εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία  $y = 2x$ .
- δ)** Έστω ( $\zeta$ ) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο καμπής της. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την ( $\varepsilon$ ) και τις ευθείες  $x = 2$  και  $x = e + 1$ .