

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x} \ln x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

- α)**
- i.** Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.
 - ii.** Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.
- β)**
- i.** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
 - ii.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 - iii.** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$.
- γ)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική της f και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .
- δ)**
- i.** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
 - ii.** Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο καμπής της.
 - iii.** Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την και την ευθεία $x = \lambda$ με $0 < \lambda < 1$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.