

Έστω η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{\ln x + \alpha}{x}$  όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Ο ρυθμός μεταβολής της  $f$  ως προς  $x$  γίνεται ελάχιστος για  $x = \sqrt{e^3}$ .

**α)** Να δείξετε ότι  $\alpha = 0$ .

**β)** Να υπολογίσετε τα όρια: **i.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(e^{-x}) + f\left(\frac{1}{x}\right)}$  και **ii.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(e^{-x}) - f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$ .

**γ) i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**ii.** Να δείξετε ότι  $f(x) \leq \frac{1}{2e}x$  για κάθε  $x > 0$ .

**iii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία ( $\varepsilon$ ).

**δ)** Δίνεται η συνάρτηση  $g : (0, e) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = f(x)$ .

**i.** Να δείξετε ότι η  $g$  αντιστρέφεται και ότι η γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης  $g^{-1}$  της  $g$  βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της  $g$ .

**ii.** Να βρείτε την ελάχιστη οριζόντια απόσταση μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g^{-1}$  και της ευθείας  $y = x$ .