

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x - xe^{\frac{1}{x}} & , x < 0 \\ (x - \alpha\sqrt{x})e^{\sqrt{x}} & , x \geq 0 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$

- α)** Να δείξετε ότι $\alpha = 0$.
- β)** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- γ)** Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο \mathbb{R} και να δείξετε ότι ισχύει $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- δ)** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις της f και της αντίστροφής της f^{-1} και την ευθεία $x = 1$.
- ε) i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$ με $g(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$.
- ii.** Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda$ με $0 < \lambda < 1$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.