

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0,1) \cup (1,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\ln x}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\beta \neq 0$.

Ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, διέρχεται από το σημείο $(1, -e)$.

- α)** Να δείξετε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = 1$.
- β)** Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- γ)** Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της.
- δ) i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$ με $g(x) = e^{1-x^2}$.
- ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της h , τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x = e$.
- ε)** Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και φ με $\varphi(x) = f^2(x)$ και την ευθεία $x = \lambda$ με $\lambda > e$.

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [E(\lambda+1) - E(\lambda)]$.