

Έστω η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

- α)** Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0 .
- β) i.** Να δείξετε ότι $f'(x) = -\frac{g(x)}{(x^2 + 1)^3}$ όπου $g(x) = (3x^2 - 1)\ln x - x^2 - 1$.
- ii.** Να εξετάσετε τη g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- iii.** Να δείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο σε σημείο με τετμημένη x_1 όπου $0 < x_1 < 1$ και ολικό μέγιστο σε σημείο με τετμημένη x_2 όπου $x_2 > 1$.
- iv.** Να δείξετε ότι η f έχει μοναδικό σημείο καμπής στο διάστημα $(x_1, 1)$.
- γ)** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- δ) i.** Να βρείτε την αρχική F της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να δείξετε ότι είναι συνεχής στο 0 .
- ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.