Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} xe^{2x}-e^{\alpha x}+1 & , \ x<0 \\ (x+\beta)\ln(x+1) & , \ x\geq 0 \end{cases}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=0$.

β) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) **i.** Να βρείτε την ασύμπτωτη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$ και να δείξετε ότι την τέμνει σε μοναδικό σημείο με τετμημένη $x_0\in(1,e-1)$.

ii. Να δείξετε ότι ισχύει $f(x)-f(x_0)\geq f'(x_0)(x-x_0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $y'y$ και την ασύμπτωτη (ε). Να δείξετε ότι $E>\frac{3}{4}$.

ε) Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $y'y$, την ασύμπτωτη (ε) και την ευθεία $x=\lambda$ με $\lambda<0$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}E(\lambda)$.