

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \begin{cases} \sqrt{e^x - e^{2x}} & , x \leq 0 \\ x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & , x > 0 \end{cases}.$$

- α)** **i.** Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.
ii. Να δείξετε ότι η αρχή των αξόνων είναι γωνιακό σημείο της γραφικής παράστασης της f .
- β)** **i.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .
ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- γ)** Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο τοπικό της μέγιστο. Να βρείτε την εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της f η οποία τέμνει την (ε) πάνω στον άξονα yy' .
- δ)** Έστω $E(\alpha)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\alpha$ με $0 < \alpha < 1$. Να υπολογίσετε το $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} E(\alpha)$.
- ε)** Έστω η συνάρτηση $g: [-\ln 2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)$.
- i.** Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη της g^{-1} .
ii. Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \int_0^{1/2} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2}\right) dx + \int_0^{-\ln 2} \sqrt{e^x - e^{2x}} dx$.