

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{e^{ax}}{1-x}$ , όπου  $a < 0$ .

Η εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $(a, f(a))$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε σημείο με τετμημένη ίση με  $-a$ .

- α)** Να δείξετε ότι  $a = -1$ .
- β)** **i.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .  
**ii.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .  
**iii.** Να λύσετε την εξίσωση  $2e^{-x} = (1-x)(\sin x + 1)$ .
- γ)** **i.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα.  
**ii.** Αν  $(x_1, f(x_1))$  και  $(x_2, f(x_2))$  είναι τα σημεία στα οποία οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της  $f$  διέρχονται από την αρχή των αξόνων, να δείξετε ότι η ( $\varepsilon$ ) είναι η εφαπτομένη της στο σημείο της  $(x_1 + x_2, f(x_1 + x_2))$ .  
**iii.** Να δείξετε ότι για κάθε  $x \in (1-e, 1)$  ισχύει ότι  $f(\ln(1-x)) \geq -\frac{e}{4}(x+1)$ .
- δ)** **i.** Να δείξετε ότι για κάθε  $x \neq 1$  ισχύει ότι  $f(x) = (1+x)e^{-x} + x^2 f(x)$ .  
**ii.** Να δείξετε ότι  $e - \frac{5}{3} \leq \int_{-1}^0 f(x) dx \leq \frac{7e}{6} - 2$ .