

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = a - (x + \beta)e^{-x}$ όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Η ευθεία $(\varepsilon): y = 1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης στο $+\infty$.

Η εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B με τετμημένη $\frac{1-e}{e}$ και τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ με τεταγμένη $1 - e$.

- α)** Να δείξετε ότι $a = 1$ και $\beta = 1$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ζ) .
- β) i.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (η) της γραφικής παράστασης της f η οποία είναι κάθετη στην εφαπτομένη της (ζ) , διέρχεται από το σημείο καμπής της.
- ii.** Να δείξετε ότι $f(x) \geq -ex - e + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) \geq \frac{1}{e}x + 1 - \frac{3}{e}$ για κάθε $x \leq 1$.
- iii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες (ζ) και (η) και τον άξονα $x'x$.
- γ)** Να δείξετε ότι, εκτός από την αρχή των αξόνων, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f τα οποία είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.
- δ)** Να δείξετε ότι το σημείο της γραφικής παράστασης της f με την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $\Delta(0,1)$ έχει τετμημένη στο διάστημα $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.