

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} + \alpha x + \beta & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Η διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στην αρχή των αξόνων.

- α)** Να δείξετε ότι $\alpha = \beta = 0$.
- β)**
- i.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .
 - ii.** Να δείξετε ότι η f έχει δύο ακρότατα με αντίθετες τετμημένες.
 - iii.** Να δείξετε ότι $-1 < m \leq f(x) \leq M < 1$, όπου m και M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f αντίστοιχα.
- γ)**
- i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$ όπου $g(x) = \sqrt{e^x - 1}$.
 - ii.** Να δείξετε ότι η h έχει ολικό μέγιστο με τετμημένη στο διάστημα $(1, 2)$.
 - iii.** Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 h(x) dx$.