Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{\alpha-\ln x}{x}$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ και η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης $(\varepsilon): y=-\lambda^2x+\lambda$, $\lambda>0$. Επιπλέον, ισχύει ότι $e^2f(x)\geq\alpha-2$ για κάθε $x>0$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\lambda=\dfrac{1}{e}$.

β) Έστω η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f\left(e^{-x}\right)$ και $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ τα σημεία που τέμνει η γραφική παράσταση της g τους άξονες $x'x$ και yy' αντίστοιχα.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της g σε σημείο της $(x_0,f(x_0))$ με $x_0\in(x_A,0)$ η οποία να είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ.

ii. Έστω E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g και τους άξονες $x'x$ και yy' και E_2 το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η (ζ) με τους άξονες $x'x$ και yy'. Να δείξετε ότι $E_1>E_2$.

γ) Έστω $E(\kappa)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την (ε) και την ευθεία $x=\kappa$ με $\kappa<e$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\kappa\to0^-}\dfrac{\eta\mu\left(\frac{1}{\kappa}\right)}{E(\kappa)}$.

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=2\int_{-1}^{0}f\left(e^x\right)dx$ έχει ρίζα το e, να βρείτε άλλη μία ρίζα της εξίσωσης και να δείξετε ότι δεν έχει άλλες ρίζες.

ε) Να δείξετε ότι το σημείο της γραφικής παράστασης της f με την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων έχει τετμημένη στο διάστημα $\left(1,\sqrt{e}\right)$ και η απόσταση αυτή είναι μικρότερη από $\sqrt{2}$ μονάδες.

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου

Συνδυαστικά απαιτητικά θέματα

Εκδόσεις Πατάκη