

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{e^x - 1}{1 + xe^x}$.

- α)** Να δείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} .
- β)** **i.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .
ii. Να δείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο $m < -1$ και τοπικό μέγιστο $M < 1$.
- γ)** **i.** Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(0, f(0))$ και να δείξετε ότι έχει με αυτήν άλλο ένα μόνο κοινό σημείο με αυτήν, το $(-1, f(-1))$.
ii. Να δείξετε ότι η (ε) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[-1, 0]$ εκτός από τα κοινά τους σημεία.
iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την εφαπτομένη (ε) .
- δ)** Έστω η συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \begin{cases} f(\ln x) & , x > 0 \\ -1 & , x = 0 \end{cases}$.
- i.** Να δείξετε ότι η g είναι συνεχής στο 0 αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 .
ii. Να βρείτε την εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της g η οποία είναι παράλληλη στην εφαπτομένη (ε) της f .
iii. Να δείξετε ότι υπάρχει κι άλλη εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g , εκτός από τη (ζ) , η οποία είναι παράλληλη στην εφαπτομένη (ε) .