

Δίνεται η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $g(x)=\ln x+\frac{1+\alpha}{x}-1-\alpha$ όπου $\alpha>-1$.

Ο άξονας $x'x$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f .

α) Να δείξετε ότι $\alpha=0$.

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $h:\mathbb{R}-\{0\}\rightarrow\mathbb{R}$ με $h(x)=\frac{x+1}{x}$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f=g\circ h$ και να δείξετε ότι $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$.

γ) i. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

δ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο εφαπτομένες οι οποίες διέρχονται από το σημείο $(0,1)$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι κάθε μία από αυτές βρίσκεται κάτω από τον κλάδο της γραφικής παράστασης της f στον οποίο εφάπτονται.

ε) Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$ με $\lambda>1$. Να υπολογίσετε το $\lim_{\lambda\rightarrow+\infty} E(\lambda)$.

στ) Έστω η συνάρτηση $\varphi:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $\varphi(x)=f(x)$.

i. Να δείξετε ότι η φ αντιστρέφεται και ότι οι γραφικές παραστάσεις της φ και της αντίστροφής της φ^{-1} τέμνονται σε μοναδικό σημείο με τετμημένη στο διάστημα $\left(0,\frac{1}{e-1}\right)$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\kappa\rightarrow 0^+} O(\kappa)$, όπου $O(\kappa)=\int_{\varphi(\kappa)}^{\varphi(\kappa+1)} \varphi^{-1}(y)dy$, $\kappa>0$.