

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\alpha x + \alpha + 1}{x - \ln x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Η f έχει ολικό μέγιστο το 1.

- α)** Να δείξετε ότι $\alpha = 0$.
- β)** **i.** Να βρείτε την ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.
ii. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- γ)** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδικό σημείο καμπής με τετμημένη η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(1, 2)$.
- δ)** **i.** Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 > 1$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το ολικό μέγιστο της f .
ii. Υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , σε σημείο της με τετμημένη που βρίσκεται στο διάστημα $(1, x_0)$, η οποία να είναι παράλληλη στην εφαπτομένη (ε) ;
- ε)** Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{x-1}{x} f(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$ με $\lambda > 1$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [E(\lambda+1) - E(\lambda)]$.