

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} e^{\ln(x+1)-2x-x^2} & , x > -1 \\ 0 & , x = -1 \end{cases}$  και η συνάρτηση

$$g: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = \frac{x+1}{e^{x^2+2x}}.$$

- α)** Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι ίσες.
- β)**
- i.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
  - ii.** Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$  και το σύνολο τιμών της.
  - iii.** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $(x+1)^2 = \ln\left(\frac{e(x+1)}{\alpha}\right)$  για τις διάφορες τιμές του θετικού αριθμού  $\alpha$ .
- γ)**
- i.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
  - ii.** Να δείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (-1, 0)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία τομής της με τους άξονες  $x'x$  και  $yy'$ .
  - iii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία τομής της με τους άξονες  $x'x$  και  $yy'$ .
  - iv.** Να δείξετε ότι  $3 - e < f(\xi) - \xi < e - 1$ .