

Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=\alpha(x+1)-\frac{\ln x}{x}-1$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 το 1.

- α)** Να δείξετε ότι $x_0=1$ και $\alpha=1$.
- β)** **i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- ii.** Να δείξετε ότι η (ε) βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x\in(0,+\infty)$ εκτός από το σημείο επαφής.
- γ)** **i.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .
- ii.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και την ευθεία $x=e$.
- δ)** **i.** Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{1-x})\geq f(x)$.
- ii.** Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^e f^2(e^{1-x})dx \geq 2E - e + 1$$

όπου E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.