

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} e^x + \alpha x + \beta & , x < 0 \\ \gamma & , x = 0 \\ x^2 - x^2 \ln x & , x > 0 \end{cases}$ όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

- α)** Να δείξετε ότι $\alpha = -1$, $\beta = -1$ και $\gamma = 0$.
- β)** **i.** Να βρείτε το πρόσημο της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που παρουσιάζει τοπικό μέγιστο τέμνει ξανά τη γραφική παράσταση της f .
- γ)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο καμπής της και την ευθεία $x = e$.
- δ)** **i.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x \in (0, 1)$.
- ii.** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$, όταν συμπίπτει με τη (ζ) .
- ε)** Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ασύμπτωτή της στο $-\infty$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \lambda$ με $\lambda < -1$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E(\lambda)$.