Κωνσταντίνος Σάλαρης, Ανδρέας Τριανταφύλλου

Μαθηματικά
για διαγωνισμούς

Ε΄ & ΣΤ΄ Δημοτικού

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

Θέση υπογραφής δικαιούχου δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας,
εφόσον η υπογραφή προβλέπεται από τη σύμβαση

Εκδόσεις Πατάκη – Εκπαίδευση
Κωνσταντίνος Σάλαρης, Ανδρέας Τριανταφύλλου, *Μαθηματικά για διαγωνισμούς – Ε΄ & ΣΤ΄ Δημοτικού*
Διορθώσεις: Νάντια Κουτσουρούμπα
Υπεύθυνος έκδοσης: Βαγγέλης Μπακλαβάς
Επιμέλεια: Γεωργία Ευθυμίου
Dtp: Γιώργος Χατζησπύρος
Φιλμ – μοντάζ: Κέντρο Γρήγορης Εκτύπωσης

Πρώτη έκδοση από τις Εκδόσεις Πατάκη, Αθήνα, Μάιος 2014
Κ.Ε.Τ. 8865 – Κ.Ε.Π. 331/14
ISBN 978-960-16-5289-4

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

ΠΑΝΑΓΗ ΤΣΑΛΔΑΡΗ (ΠΡΩΗΝ ΠΕΙΡΑΙΩΣ) 38, 104 37 ΑΘΗΝΑ,
ΤΗΛ.: 210.36.50.000, 210.52.05.600, 801.100.2665, ΦΑΞ: 210.36.50.069
ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ: ΕΜΜ. ΜΠΕΝΑΚΗ 16, 106 78 ΑΘΗΝΑ, ΤΗΛ.: 210.38.31.078
ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΗΜΑ ΒΟΡΕΙΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ: ΚΟΡΥΤΣΑΣ (ΤΕΡΜΑ ΠΟΝΤΟΥ – ΠΕΡΙΟΧΗ Β΄ ΚΤΕΟ),
570 09 ΚΑΛΟΧΩΡΙ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ, Τ.Θ. 1213, ΤΗΛ.: 2310.70.63.54, 2310.70.67.15, ΦΑΞ: 2310.70.63.55
Web site: http://www.patakis.gr • e-mail: info@patakis.gr, sales@patakis.gr

Περιεχομενα

μονάδα. Όλοι λοιπόν οι πρώτοι αριθμοί έχουν κοινό διαιρέτη τον αριθμό 1, που είναι ταυτόχρονα και ο ΜΚΔ τους.

1.1.9 ΕΥΡΕΣΗ ΜΚΔ

Έστω ότι ζητούμε τον ΜΚΔ των αριθμών 48 και 36.

Βήμα 1: Βρίσκουμε τους διαιρέτες των δύο αριθμών.
Οι διαιρέτες του 48 είναι Δ (48): 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.
Οι διαιρέτες του 60 είναι Δ (60): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.
Βήμα 2: Από τους διαιρέτες παίρνουμε τους κοινούς διαιρέτες.
Οι κοινοί διαιρέτες των δύο αριθμών είναι οι 1, 2, 3, 4, 6, 12.
Βήμα 3: Από τους κοινούς διαιρέτες παίρνουμε τον μεγαλύτερο.
Ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες είναι ο 12. Άρα
ΜΚΔ (48, 36) = 12.

Την ίδια διαδικασία ακολουθούμε, αν έχουμε τρεις ή περισσότερους αριθμούς και ζητούμε τον ΜΚΔ αυτών.

Υπάρχει και άλλος τρόπος, που στηρίζεται σε ιδιότητες της Ευκλείδειας Διαίρεσης, για την εύρεση του ΜΚΔ δύο ή περισσότερων αριθμών.

Παράδειγμα

Για να βρούμε τον ΜΚΔ των αριθμών 32, 90, 96 και 144, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1: Γράφουμε τους αριθμούς στη σειρά.	32	88	96	144
Βήμα 2: Βρίσκουμε τον μικρότερο (32) και τον γράφουμε κάτω από τον εαυτό του. Στον καθέναν από τους άλλους γράφουμε αποκάτω το υπόλοιπο της διαίρεσής του με τον μικρότερο (που έχουμε επιλέξει): $88 = 2 \cdot 32 + 24$, $96 = 3 \cdot 32 + 0$,$144 = 4 \cdot 32 + 16$.	32	24	0	16
Βήμα 3: Επαναλαμβάνουμε το βήμα 2 με τον μικρότερο μη μηδενικό αριθμό της δεύτερης γραμμής.	0	8	0	16
Βήμα 4: Το ίδιο (βήμα 3) κάνουμε και για τους αριθμούς της τρίτης γραμμής κ.ο.κ., μέχρι να φτάσουμε να έχουμε μόνο έναν μη μηδενικό αριθμό.	0	8	0	0

Ο αριθμός που έμεινε είναι ο ζητούμενος ΜΚΔ των δοσμένων αριθμών. Άρα ΜΚΔ (32, 88, 96, 144) = 8.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Πρόβλημα 021

Ένας ανθοπώλης διαθέτει 58 τριαντάφυλλα, 145 γαρίφαλα και 203 κρίνους. Πόσες το πολύ ομοιόμορφες ανθοδέσμες μπορεί να φτιάξει; Πόσα άνθη από το κάθε είδος θα περιέχει καθεμία από αυτές;

1.1.10 ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΙΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ (ΕΚΠ)

- **Κοινό Πολλαπλάσιο** δύο ή περισσότερων δοσμένων αριθμών λέγεται κάθε αριθμός ο οποίος διαιρείται από τους δοσμένους αριθμούς.
  Παράδειγμα: Ο αριθμός 100 είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 1, 2, 4, 5, 10, 20, 50 και 100.
- **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο** δοσμένων αριθμών καλείται το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών αυτών.

1.1.11 ΕΥΡΕΣΗ ΕΚΠ

Για να βρούμε το ΕΚΠ πολλών αριθμών, πολλαπλασιάζουμε τον μεγαλύτερο από τους δοσμένους αριθμούς διαδοχικά με τους αριθμούς 1, 2, 3 κτλ., μέχρι να βρούμε αριθμό (πολλαπλάσιό του) ο οποίος να είναι διαιρετός από όλους τους δοσμένους αριθμούς.

Παράδειγμα

Δίνονται οι αριθμοί 5, 6, 10. Παίρνουμε τον μεγαλύτερο, τον 10, και τον πολλαπλασιάζουμε με τον 1, μετά με τον 2 και κατόπιν με τον 3. Παρατηρούμε ότι από τους αριθμούς που δημιουργήθηκαν, 10, 20, 30, ο 30 είναι πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 6, και μάλιστα το ελάχιστο από τα πολλαπλάσια.

Αν ζητούσαμε το ΕΚΠ των αριθμών 4, 8, 16, πάλι θα παίρναμε τον μεγαλύτερο, δηλαδή τον 16. Παρατηρούμε ότι ο 16 είναι πολλαπλάσιο του 4, του 8 (και του 16), άρα είναι το ΕΚΠ των τριών δοσμένων αριθμών.

Την ίδια διαδικασία ακολουθούμε και όταν έχουμε περισσότερους από τρεις αριθμούς και ζητάμε το ΕΚΠ τους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Πρόβλημα 022

Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός που διαιρείται με το 2, με το 3, με το 4, με το 5 και με το 6;

Πρόβλημα 023

Τρεις καμπάνες μιας εκκλησίας χτυπάνε η Α ανά 2 δευτερόλεπτα, η Β ανά 3 δευτερόλεπτα και η Γ ανά 4 δευτερόλεπτα. Κάποια στιγμή χτυπάνε και οι τρεις ταυτόχρονα. Μετά από πόσα δευτερόλεπτα θα χτυπήσουν πάλι ταυτόχρονα οι καμπάνες;

Πρόβλημα 024

Ο Γιάννης και η Άννα προπονούνται στο στάδιο. Ο Γιάννης ολοκληρώνει έναν πλήρη γύρο του σταδίου σε 3 λεπτά και η Άννα σε 4 λεπτά. Αν ξεκινήσουν και οι δύο από την αφετηρία ταυτόχρονα, μετά από πόσα λεπτά θα ξαναβρεθούν για πρώτη φορά μαζί στην αφετηρία;

Πρόβλημα 025

Δύο φίλοι, ο ψηλός και ο κοντός, περπατάνε μαζί σε κυκλική πίστα. Ο ψηλός έχει βήμα 80 εκατοστά του μέτρου και ο κοντός 60 εκατοστά του μέτρου. Αν ξεκίνησαν μαζί την ίδια στιγμή, μετά από πόσα βήματα του κοντού θα συγχρονιστούν (θα βρεθούν να περπατούν δίπλα δίπλα) πάλι για πρώτη φορά; Πόσο διάστημα θα έχουν διανύσει;

1.1.12 Α. ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

Για να γράψουμε έναν αριθμό ως γινόμενο πρώτων αριθμών, κάνουμε το εξής: Γράφουμε τον αριθμό και δεξιά του μια κατακόρυφη γραμμή. Αρχίζουμε να τον διαιρούμε διαδοχικά με τους πρώτους αριθμούς, γράφοντας κάθε φορά δεξιά του (μετά την κατακόρυφη γραμμή) τον αριθμό με τον οποίο τον διαιρέσαμε και αποκάτω του το πηλίκο της διαίρεσης. Αν ο αριθμός ή ένα πηλίκο δε διαιρείται με τον πρώτο αριθμό που ακολουθεί, πηγαίνουμε στον επόμενο πρώτο, μέχρι να βρούμε έναν πρώτο αριθμό που να διαιρεί τον αριθμό ή το πηλίκο. Σταματάμε τις διαιρέσεις όταν το πηλίκο της διαίρεσης είναι το 1. Ο αριθμός μας τότε θα είναι ίσος με το γινόμενο των αριθμών (διαιρετών του) που βρίσκονται κατακόρυφα, δεξιά της γραμμής.

Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής: Κάθε φυσικός αριθμός αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αναλυθεί ο 450 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

ΛΥΣΗ

Γράφουμε τον αριθμό 450, φέρνουμε δεξιά του μια κατακόρυφη γραμμή και αρχίζουμε διαδοχικές διαιρέσεις:

$$\begin{array}{r|l} 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Επομένως έχουμε $450 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Πρόβλημα 026

Ποιο είναι το άθροισμα όλων των πρώτων παραγόντων του αριθμού 60;

1.1.12 Β. ΕΝΑΣ ΑΛΛΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΓΙΑ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΤΟΝ ΜΚΔ ΚΑΙ ΤΟ ΕΚΠ

Η μέθοδος αυτή αφορά δύο ή περισσότερους αριθμούς, όταν θέλουμε να βρούμε τον ΜΚΔ και το ΕΚΠ τους.

Τα βήματα που ακολουθούμε είναι:

Βήμα 1: Αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Βήμα 2: Βρίσκουμε τον ΜΚΔ των αριθμών, ο οποίος είναι ίσος με το γινόμενο όλων των κοινών παραγόντων των αριθμών με τη μικρότερη δύναμη.

Βήμα 3: Βρίσκουμε το ΕΚΠ των αριθμών, το οποίο είναι ίσο με το γινόμενο όλων των κοινών και μη κοινών παραγόντων των αριθμών με τη μεγαλύτερη δύναμη.

Εφαρμογη

Να βρεθεί ο ΜΚΔ και το ΕΚΠ των αριθμών 60, 120 και 210.

ΛΥΣΗ

Αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

210	2	120	2	60	2
105	3	60	2	30	2
35	5	30	2	15	3
7	7	15	3	5	5
1		5	5	1	
		1			

Επομένως έχουμε:

$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

Ο ΜΚΔ είναι ίσος με το γινόμενο των κοινών παραγόντων με τους μικρότερους εκθέτες: $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Το ΕΚΠ είναι ίσο με το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων με τους μεγαλύτερους εκθέτες: $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7 = 8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$.

1.2 ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ένας δεκαδικός αριθμός αποτελείται από ένα ακέραιο και ένα δεκαδικό μέρος που χωρίζονται μεταξύ τους με υποδιαστολή (,). Όπως στους φυσικούς αριθμούς, έτσι και στους δεκαδικούς υπάρχουν οι μονάδες διάφορων τάξεων, τόσο στο ακέραιο όσο και στο δεκαδικό μέρος.

Παράδειγμα

3. 7 8 3, 4 5 6 3 7 6

εκατομμυριοστά
εκατοντάκις χιλιοστά
δεκάκις χιλιοστά
χιλιοστά
εκατοστά
δέκατα

Δεκαδικό μέρος

μονάδες
δεκάδες
εκατοντάδες
χιλιάδες

Ακέραιο μέρος

Προσέχω!

- Οι δεκαδικοί δεν αλλάζουν αν προσθέσουμε ή διαγράψουμε μηδενικά στο τέλος τους (ή στην αρχή του ακέραιου μέρους τους, όπως έχουμε ήδη αναφέρει), π.χ. 4,320 = 4,32, 78,45100 = 78,451 και 045,320 = 45,32.
- Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός με δεκαδικό μέρος μηδέν, π.χ. 453 = 453,0 ή ακόμα και 453,00 κ.ο.κ.

Παράδειγμα

ΓΡΑΦΩ	ΔΙΑΒΑΖΩ
4,3	Τέσσερα και τρία δέκατα
7,45	Επτά και σαράντα πέντε εκατοστά
8,963	Οκτώ και εννιακόσια εξήντα τρία χιλιοστά
54,324	Πενήντα τέσσερα και τριακόσια είκοσι τέσσερα χιλιοστά
3,04	Τρία και τέσσερα εκατοστά
4,033	Τέσσερα και τριάντα τρία χιλιοστά
12,004	Δώδεκα και τέσσερα χιλιοστά
1,103	Ένα και εκατόν τρία χιλιοστά
7,0004	Επτά και τέσσερα δεκάκις χιλιοστά
10,7	Δέκα και επτά δέκατα
6,09	Έξι και εννέα εκατοστά
11,023	Έντεκα και είκοσι τρία χιλιοστά
10,302	Δέκα και τριακόσια δύο χιλιοστά

Προβληματα Πληρους Αναπτυξης

Πρόβλημα 027

Πόσοι φυσικοί αριθμοί περιέχονται μεταξύ του 2,09 και του 15,3;

1.2.1 ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΚΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Πολλές φορές χρειάζεται να παίρνουμε γρήγορες αποφάσεις ανάλογα με τα αποτελέσματα κάποιων πράξεων. Για τον λόγο αυτό κυρίως, αλλά και για άλλους πρακτικούς λόγους, χρησιμοποιούμε στη θέση ενός αριθμού έναν άλλο μικρότερο ή μεγαλύτερο (ακολουθώντας κάποιους κανόνες), πολύ κοντινό στον αρχικό, αλλά απλούστερο στη γραφή και στην ανάγνωση. Η διαδικασία αυτή λέγεται **στρογγυλοποίηση**.

Κανόνες στρογγυλοποίησης

Για να στρογγυλοποιήσουμε έναν αριθμό:

– Αν το ψηφίο που βρίσκεται δεξιά από εκείνο όπου θέλουμε να γίνει η στρογγυλοποίηση είναι 0, 1, 2, 3, 4, τότε απλώς το αντικαθιστούμε, όπως και όλα τα δεξιά του ψηφία με μηδενικά, *αφήνοντας αμετάβλητο* το ψηφίο στο οποίο θέλουμε να στρογγυλοποιήσουμε, π.χ. 4.874.012 → 4.874.000.
– Αν το ψηφίο που βρίσκεται δεξιά από εκείνο όπου θέλουμε να γίνει η στρογγυλοποίηση είναι 5, 6, 7, 8, 9, τότε το αντικαθιστούμε πάλι, όπως και όλα τα δεξιά του ψηφία με μηδενικά, *αυξάνοντας κατά μία μονάδα* το ψηφίο στο οποίο θέλουμε να στρογγυλοποιήσουμε, π.χ. 87.583 → 87.600.
– Αν το ψηφίο της στρογγυλοποίησης είναι 9, τότε το μηδενίζουμε και αυξάνουμε το προηγούμενό του ψηφίο κατά μία μονάδα, π.χ.
  3.489.571 → 3.490.000,
  65.997.510 → 66.000.000.

1.2.2 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΚΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- Για να συγκρίνουμε δύο αριθμούς φυσικούς ή δεκαδικούς, συγκρίνουμε πρώτα τα ακέραια μέρη τους και, αν είναι ίσα, τότε συγκρίνουμε και τα δεκαδικά μέρη τους (για δεκαδικούς αριθμούς).
- Για τη σύγκριση χρησιμοποιούμε τα σύμβολα: <, >, = (μικρότερο, μεγαλύτερο, ίσο αντίστοιχα).
- Η διάταξη των αριθμών γίνεται είτε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο (αύξουσα σειρά) είτε από τον μεγαλύτερο προς τον μικρότερο (φθίνουσα σειρά), π.χ. 100 < 101, 23,2 > 23,1, 42,7 < 43.
- Η έκφραση α < β < γ πρακτικά διαβάζεται:
  «ο β μεταξύ των α και γ» ή «ο β ανάμεσα στους α και γ».

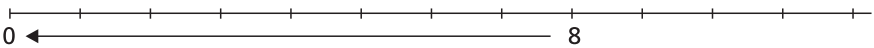
Δεν είναι επιτρεπτή η έκφραση α < γ > β. Δεν μπορούμε να πούμε 10 < 20 > 9. Για να υπάρχουν διαδοχικές ανισότητες σε μία γραφή, πρέπει να έχουν όλες την **ίδια φορά**.

Εφαρμογη

Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς α που ικανοποιούν τη σχέση:
α) α < 8 β) α > 5 γ) 9 < α < 12

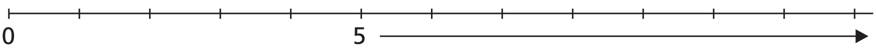
ΛΥΣΗ

α) Τοποθετούμε τον αριθμό 8 στην αριθμογραμμή.



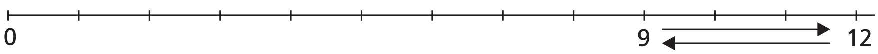
Οι αριθμοί που αναζητούμε είναι οι μικρότεροι του 8. Άρα βρίσκονται αριστερότερα του 8. Επομένως οι φυσικοί αριθμοί που ικανοποιούν τη σχέση αυτή είναι οι 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 7.

β) Τοποθετούμε τον αριθμό 5 στην αριθμογραμμή.



Οι αριθμοί που αναζητούμε είναι οι μεγαλύτεροι του 5. Άρα βρίσκονται δεξιότερα του 5. Επομένως οι φυσικοί αριθμοί που ικανοποιούν τη σχέση αυτή είναι οι 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, …

γ) Τοποθετούμε τους αριθμούς 9 και 12 στην αριθμογραμμή.



Οι αριθμοί που αναζητούμε είναι οι μεγαλύτεροι του 9, άρα βρίσκονται δεξιότερα του 9, και οι μικρότεροι του 12, άρα βρίσκονται αριστερότερα του 12. Επομένως οι φυσικοί αριθμοί που ικανοποιούν τη σχέση αυτή είναι οι 10 και 11.

1.2.3 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΚΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Μπορούμε να προσθέσουμε και να αφαιρέσουμε αριθμούς (φυσικούς και δεκαδικούς), προσέχοντας κατά την κατακόρυφη τοποθέτησή τους τα ψηφία της ίδιας τάξης να βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφη (για να το πετύχουμε αυτό, αρκεί στην κατακόρυφη τοποθέτησή τους οι υποδιαστολές να βρίσκονται η μία ακριβώς κάτω από την άλλη).

Οι αριθμοί που προσθέτουμε λέγονται *προσθετέοι* και το αποτέλεσμα της πρόσθεσης λέγεται **άθροισμα**.

Στην πρόσθεση ισχύει η *αντιμεταθετική ιδιότητα*:

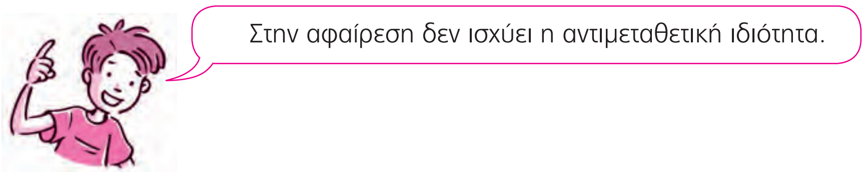
$$α + β = β + α$$

δηλαδή δεν έχει σημασία με ποια σειρά προσθέτουμε τους αριθμούς.

Επίσης, ισχύει και η *προσεταιριστική ιδιότητα*, δηλαδή σε μία πρόσθεση πολλών αριθμών προσθέτουμε πρώτα τους δύο και μετά στο άθροισμά τους προσθέτουμε τον τρίτο κ.ο.κ., χωρίς να έχει σημασία η σειρά των προσθετέων:

$$α + (β + γ) = (α + β) + γ$$

Αφαίρεση είναι η πράξη με την οποία, όταν δίνονται δύο αριθμοί, Μ (μειωτέος) και Α (αφαιρετέος), βρίσκουμε έναν αριθμό Δ (διαφορά), ο οποίος, όταν προστεθεί στον αφαιρετέο, δίνει άθροισμα τον μειωτέο. Ισχύει $Μ - Α = Δ$, διότι $Α + Δ = Μ$.



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να γίνουν οι πράξεις κατακόρυφα:

α) 45,32 + 2,98
β) 780,209 + 9,66
γ) 74,23 − 7,32

ΛΥΣΗ

α) 45,32	**β)** 780,209	**γ)** 74,23
+ 2,98	+ 9,660	+ 7,32
48,30	789,869	66,91

2. Αν $x + ψ = 3$ και $φ + ω = 7$, να βρεθούν τα αθροίσματα:

α) $x + ψ + φ + ω$ **β) $x + φ + ψ + ω$**
γ) $x + ψ + 5 + φ + ω$ **δ) $x + φ + 14 + ψ + ω$**
ε) $2 + x + φ + 9 + ψ + ω$ **στ) $x + 4 + φ + 8 + ω + ψ$**

ΛΥΣΗ

Αντικαθιστούμε τις τιμές που έχουμε, οπότε:

α) $x + \psi + \varphi + \omega = (x + \psi) + (\varphi + \omega) = 3 + 7 = 10$ (λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας της πρόσθεσης).

β) $x + \varphi + \psi + \omega = x + \psi + \varphi + \omega = 3 + 7 = 10$ (λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας της πρόσθεσης).

γ) $x + \psi + 5 + \varphi + \omega = 3 + 5 + 7 = 15$.

δ) $x + \varphi + 14 + \psi + \omega = x + \psi + 14 + \varphi + \omega = (x + \psi) + 14 + (\varphi + \omega) =$
$= 3 + 14 + 7 = 24$ (λόγω της αντιμεταθετικής και της προσεταιριστικής ιδιότητας της πρόσθεσης).

ε) $2 + x + \varphi + 9 + \psi + \omega = 2 + x + \psi + 9 + \varphi + \omega = 2 + 3 + 9 + 7 = 21$ (λόγω της αντιμεταθετικής και της προσεταιριστικής ιδιότητας της πρόσθεσης).

στ) $x + 4 + \varphi + 8 + \omega + \psi = x + \psi + 4 + 8 + \varphi + \omega = (x + \psi) + 4 + 8 + (\varphi + \omega) =$
$= 3 + 4 + 8 + 7 = 22$ (λόγω της αντιμεταθετικής και της προσεταιριστικής ιδιότητας της πρόσθεσης).

1.2.4 ΜΙΑ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΥΣΑ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Η έξυπνη πρόσθεση

Το 1789, σε μια μικρή πόλη της Γερμανίας, φοιτούσε στην ΣΤ΄τάξη του δημοτικού σχολείου ένας μαθητής που το όνομά του ήταν Καρλ. Ο δάσκαλος ζήτησε να υπολογίσουν οι μαθητές το άθροισμα $1+2+3+4+\ldots+97+98+99+100$, δηλαδή το άθροισμα των 100 πρώτων φυσικών αριθμών. Μετά από ελάχιστο χρόνο ο μικρός Καρλ είπε στον δάσκαλο ότι βρήκε το αποτέλεσμα. Έκπληκτος ο δάσκαλος ρώτησε πώς. Τότε ο μικρός μαθητής ανέβηκε στον πίνακα και έγραψε:

$$(1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(47+54)+(48+53)+(49+52)+(50+51)=$$
$$=(101)+(101)+(101)+\ldots+(101)+(101)+(101)+(101)=101 \cdot 50^{*}=5.050.$$

* Πενήντα (50) είναι το πλήθος των παρενθέσεων, αφού πήρε τους 100 αριθμούς σε ζευγάρια:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \ldots + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$$

Σημείωση: Ο μικρός μαθητής Καρλ δεν ήταν άλλος από τον μετέπειτα διάσημο μαθηματικό Karl Friedrich Gauss (1777-1855).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Πρόβλημα 028

Αν κάνετε τις πράξεις 1999 – 999 + 99 – 9, ποιο αποτέλεσμα θα πάρετε;

Πρόβλημα 029

Το άθροισμα 1,13 + 0,003 + 2,15 + 1,017 μεταξύ ποιων διαδοχικών ακεραίων βρίσκεται;

1.2.5 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΚΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε φυσικούς ή δεκαδικούς αριθμούς. Το αποτέλεσμα που προκύπτει λέγεται **γινόμενο**. Ο πολλαπλασιασμός είναι ένας γρήγορος τρόπος υπολογισμού μιας **επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης**.

Παράδειγμα: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 8 \bullet 3 = 24$.

Οι αριθμοί που πολλαπλασιάζονται λέγονται **παράγοντες** του γινομένου.

Στην περίπτωση δύο παραγόντων, τον αριθμό που μας δείχνει πόσες φορές θα επαναληφθούν οι μονάδες του άλλου τον λέμε πολλαπλασιαστή και τον άλλο πολλαπλασιαστέο. Όταν ένας τουλάχιστον είναι δεκαδικός, τότε στο αποτέλεσμα χωρίζουμε με υποδιαστολή, από τα δεξιά προς τα αριστερά, τόσα δεκαδικά ψηφία όσα ήταν και τα συνολικά δεκαδικά ψηφία των παραγόντων του γινομένου.

Στον πολλαπλασιασμό ισχύει η *αντιμεταθετική ιδιότητα*:

$$α \cdot β = β \cdot α$$

Δεν έχει σημασία με ποια σειρά πολλαπλασιάζουμε τους αριθμούς.

Επίσης, ισχύει και η *προσεταιριστική ιδιότητα*, δηλαδή σε έναν πολλαπλασιασμό πολλών αριθμών πολλαπλασιάζουμε πρώτα τους δύο και μετά πολλαπλασιάζουμε το γινόμενό τους με τον τρίτο κ.ο.κ., χωρίς να έχει σημασία η σειρά των παραγόντων:

$$α \cdot (β \cdot γ) = (α \cdot β) \cdot γ$$

Ένα γινόμενο ισούται με 0, μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους παράγοντές του είναι ίσος με μηδέν, π.χ. $4 \cdot 7 \cdot 0{,}84 \cdot 0 \cdot 7{,}2 = 0$. Αυτό ισχύει και αντίστροφα. Δηλαδή, όταν ένας ή περισσότεροι από τους παράγοντες ενός γινομένου είναι μηδέν, τότε το γινόμενο είναι μηδέν.

Για να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με το άθροισμα δύο ή περισσότερων προσθετέων, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό με κάθε όρο ξεχωριστά και να προσθέσουμε τα επιμέρους γινόμενα. Η ιδιότητα αυτή λέγεται **επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση. Δηλαδή:

$$α \cdot (β + γ) = α \cdot β + α \cdot γ$$

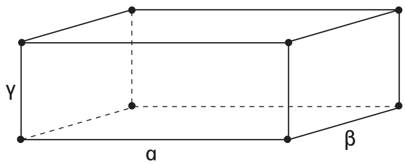
Η επιμεριστική ιδιότητα ισχύει και για τον πολλαπλασιασμό ενός αριθμού με τη διαφορά δύο αριθμών. Δηλαδή:

$$α \cdot (β - γ) = α \cdot β - α \cdot γ$$

2.12 ΟΓΚΟΣ ΣΤΕΡΕΩΝ

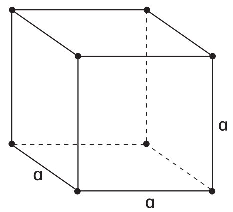
Ο όγκος του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου ισούται με το γινόμενο του μήκους του α επί το πλάτος β επί το ύψος του γ, δηλαδή:

$$V_{\text{ορθ. παραλληλεπιπέδου}} = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$$



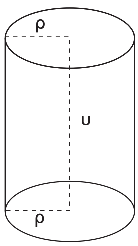
Ο όγκος του κύβου, σύμφωνα με τα παραπάνω, ισούται με το γινόμενο του μήκους επί το πλάτος επί το ύψος του, κι επειδή το μήκος, το πλάτος και το ύψος του είναι όλα ίσα μεταξύ τους και ίσα με α, ισχύει:

$$V_{\text{κύβου}} = \alpha^3$$

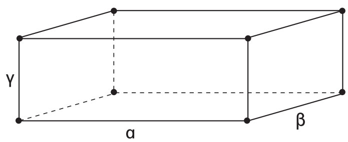
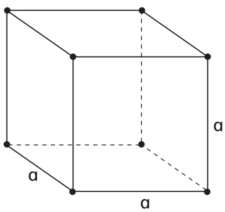
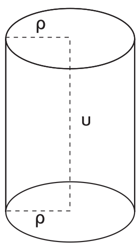


Ο όγκος ενός κυλίνδρου είναι ίσος με το εμβαδόν της βάσης του επί το ύψος του, δηλαδή:

$$V_{\text{κυλίνδρου}} = \pi \cdot \rho^2 \cdot \upsilon$$



ΣΥΝΟΠΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΛΙΚΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΚΑΙ ΟΓΚΟΥ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΣΤΕΡΕΟ	ΟΝΟΜΑ ΣΤΕΡΕΟΥ	ΤΥΠΟΣ ΟΛΙΚΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ	ΤΥΠΟΣ ΟΓΚΟΥ
	Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο	$2 \cdot \alpha \cdot \beta + + (2\alpha + 2\beta) \cdot \gamma$	$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$
	Κύβος	$6 \cdot \alpha \cdot \alpha = 6 \cdot \alpha^2$	$\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^3$
	Κύλινδρος	$2 \cdot \pi \cdot \rho^2 + + 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \upsilon$	$\pi \cdot \rho^2 \cdot \upsilon$

Εφαρμογές

1. Μια δεξαμενή γεμίζει από μια παροχή νερού σε 2 ώρες. Αν η παροχή αυτή ρίχνει στη δεξαμενή 40 κ.εκ. το λεπτό, ποια είναι η χωρητικότητα της δεξαμενής σε λίτρα;

ΛΥΣΗ

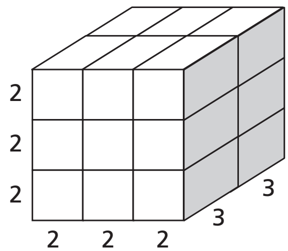
Εφόσον η παροχή είναι 40 κ.εκ. το λεπτό, σε 2 ώρες (δηλαδή σε 120 λεπτά) θα έχει ρίξει στη δεξαμενή:

$40 \cdot 120 = 4.800$ κ.εκ.

Μετατρέπουμε σε λίτρα την πιο πάνω ποσότητα κι έχουμε:
4.800 : 1.000 = 48 λίτρα.
Άρα 48 λίτρα είναι η χωρητικότητα της δεξαμενής.

2. **Κατασκευάσαμε από 18 ορθογώνια παραλληλεπίπεδα μήκους 2 εκ., πλάτους 3 εκ. και ύψους 2 εκ. έναν μεγάλο κύβο. Ποιος είναι ο όγκος του κύβου; Ποιο το εμβαδόν της βάσης;**

ΛΥΣΗ



Όπως βλέπουμε στο διπλανό σχήμα, για να μπορέσουμε να σχηματίσουμε με τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα κύβο, θα πρέπει να τοποθετήσουμε τρεις σειρές με ανά τρία στο μήκος και ανά δύο στο πλάτος ορθογώνια παραλληλεπίπεδα.
Ο κύβος θα έχει ακμή μήκους 6 εκ.
Επομένως θα έχει όγκο $V = 6^3 = 216$ κ.εκ. Το εμβαδόν της βάσης του είναι $E = 6^2 = 36$ τ.εκ., διότι η βάση είναι τετράγωνο πλευράς 6 εκ.

Βρίσκουμε τον όγκο καθενός από τα 18 ορθογώνια παραλληλεπίπεδα.

Όγκος μικρού παραλληλεπιπέδου: $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ κ.εκ.
Βρίσκουμε τον όγκο του κύβου προσθέτοντας τους όγκους των 18 ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων,
δηλαδή $V = 18 \cdot 12$ κ.εκ. $= 216$ κ.εκ.
Παρατηρούμε ότι, όπως έχουν τοποθετηθεί τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, η βάση σχηματίζει ένα τετράγωνο πλευράς 6 εκ. Επομένως το εμβαδόν της βάσης του είναι $E = 6^2 = 36$ τ.εκ.

3. **Να βρείτε το ύψος ενός κυλίνδρου που έχει όγκο 84,78 κ.εκ. και ακτίνα βάσης 3 εκ.**

ΛΥΣΗ

Από τον τύπο που δίνει τον όγκο κυλίνδρου έχουμε:

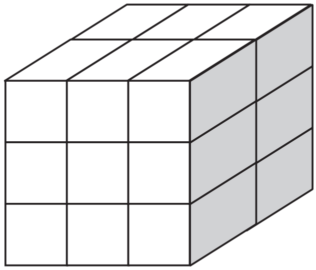
$$V = \pi \cdot \rho^2 \cdot \upsilon$$

οπότε $3{,}14 \cdot 3^2 \cdot \upsilon = 84{,}78$, δηλαδή $28{,}26 \cdot \upsilon = 84{,}78$, επομένως
$\upsilon = 84{,}78 : 28{,}26$, άρα $\upsilon = 3$ εκ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

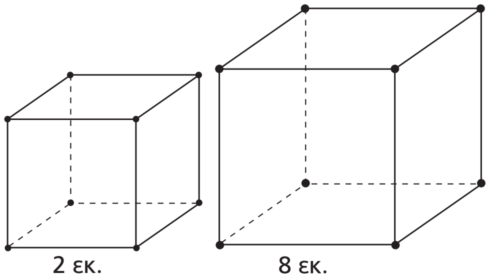
Πρόβλημα 143

Πόσα μικρά παραλληλεπίπεδα χρειάζεται η Αθηνά, για να κατασκευάσει τον μεγάλο κύβο που φαίνεται στο σχήμα;



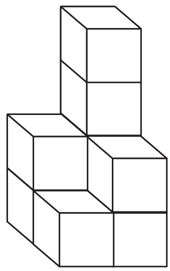
Πρόβλημα 144

Πόσοι κύβοι διαστάσεων 2 εκ. × 2 εκ. × 2 εκ. (μικρός κύβος) χρειάζονται για να φτιάξουμε έναν κύβο διαστάσεων 8 εκ. × 8 εκ. × 8 εκ. (μεγάλος κύβος);



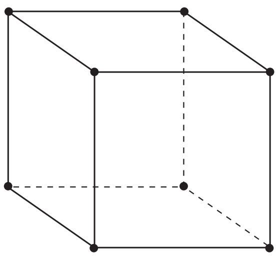
Πρόβλημα 145

Πόσα κυβάκια χρειάζονται, για να κατασκευαστεί το στερεό που φαίνεται στο διπλανό σχήμα;



Πρόβλημα 146

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του οποίου η βάση είναι τετράγωνο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο όγκος του παραλληλεπιπέδου είναι 640 κυβικά μέτρα και το ύψος του είναι 10 μέτρα. Θέλουμε να βάψουμε την εξωτερική επιφάνεια του στερεού. Πόσα ευρώ θα κοστίσει το βάψιμο, αν γνωρίζουμε ότι, για να βάψουμε ένα τετραγωνικό μέτρο, χρειαζόμαστε 2 €;



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Άσκηση 001

Ποια από τις πέντε επιλογές είναι ο μεγαλύτερος αριθμός;

Α. 5 • 4 **Β.** 2 • 9 **Γ.** 12 • 1 **Δ.** 25 • 0 **Ε.** 7 • 3

Άσκηση 002

Η αγαπημένη σου εκπομπή στην τηλεόραση αρχίζει στις 20:00. Ανακοινώνεται από την τηλεόραση ότι θα αρχίσει σε 12 λεπτά. Τι ώρα ακριβώς έγινε η ανακοίνωση;

Α. 7:30 μ.μ. **Β.** 8:00 μ.μ. **Γ.** 8:36 μ.μ. **Δ.** 8:12 μ.μ. **Ε.** 7:48 μ.μ.

Άσκηση 003

Ποιο κλάσμα είναι μεγαλύτερο;

Α. Ένα πέμπτο **Β.** Ένα έκτο **Γ.** Ένα έβδομο
Δ. Ένα όγδοο **Ε.** Ένα ένατο

Άσκηση 004

Ποια από τις διαφορές είναι η μεγαλύτερη;

Α. 401 – 287 **Β.** 402 – 287 **Γ.** 402 – 288
Δ. 402 – 289 **Ε.** 403 – 289

Άσκηση 005

Στο βιβλιοπωλείο ένα μολύβι κοστίζει 8 λεπτά και μια γόμα κοστίζει 7 λεπτά. Αν η Κατερίνα αγοράσει 9 μολύβια και 8 γόμες και δώσει ένα χαρτονόμισμα των 5 €, πόσα ευρώ ρέστα θα πάρει;

Α. 2,63 **Β.** 3,65 **Γ.** 4,72 **Δ.** 3,72 **Ε.** 2,75

Άσκηση 006

Το άθροισμα 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 είναι:

Α. 5 • 2 **Β.** 4 • 2 **Γ.** 2 • 2 **Δ.** 1 • 2 **Ε.** 6 • 2

Άσκηση 007

Ποια από τις ακόλουθες διαιρέσεις αφήνει το μικρότερο υπόλοιπο;

Α. $\frac{4.002}{4}$ **Β.** $\frac{503}{5}$ **Γ.** $\frac{604}{6}$ **Δ.** $\frac{75}{7}$ **Ε.** $\frac{5.001}{5}$

Άσκηση 008

Ποιο από τα ακόλουθα κλάσματα είναι μεγαλύτερο;

Α. Πέντε δέκατα **Β.** Πέντε ένατα **Γ.** Τέσσερα όγδοα
Δ. Τρία έκτα **Ε.** Δύο τέταρτα

Άσκηση 009

Ο πατέρας του πατέρα μου έχει μια κόρη. Η αδελφή της είναι:

Α. αδελφή μου **Β.** γιαγιά μου **Γ.** μητέρα μου
Δ. ξαδέλφη μου **Ε.** θεία μου

Άσκηση 010

Ποιο από τα πιο κάτω κομμάτια της πίτσας είναι το μεγαλύτερο;

Α. $\frac{1}{3}$ **Β.** $\frac{5}{9}$ **Γ.** $\frac{7}{18}$ **Δ.** $\frac{1}{2}$ **Ε.** $\frac{3}{5}$

Άσκηση 011

Το γινόμενο 9.883 • 2.739 είναι:

Α. 27.038.232 **Β.** 27.058.336 **Γ.** 27.060.438
Δ. 27.069.537 **Ε.** 27.081.934

Άσκηση 012

Ποιο από τα κλάσματα είναι ίσο με το κλάσμα $\frac{3}{4}$;

Α. $\frac{4}{8}$ **Β.** $\frac{5}{8}$ **Γ.** $\frac{6}{8}$ **Δ.** $\frac{7}{8}$ **Ε.** $\frac{3}{8}$

Άσκηση 013

Να επιλέξετε ένα από τα πέντε μεικτά κλάσματα που είναι ίσο με το κλάσμα $\frac{8}{3}$:

Α. $2\frac{1}{2}$ **Β.** $2\frac{2}{3}$ **Γ.** $2\frac{1}{3}$ **Δ.** $3\frac{2}{3}$ **Ε.** $4\frac{1}{2}$

Άσκηση 014

Ποιος από τους αριθμούς είναι ο μικρότερος;

Α. $\frac{1}{3}$ **Β.** $\frac{3}{10}$ **Γ.** $\frac{333}{1.000}$ **Δ.** $\frac{7}{20}$ **Ε.** 0,33

Άσκηση 015

Ποιο από τα κλάσματα έχει τη μεγαλύτερη αξία;

Α. $\frac{5}{10}$ **Β.** $\frac{5}{9}$ **Γ.** $\frac{5}{8}$ **Δ.** $\frac{5}{7}$ **Ε.** $\frac{5}{6}$

Άσκηση 016

Η Ειρήνη γιόρτασε προχθές τα γενέθλιά της. Αύριο είναι Παρασκευή. Ποια μέρα γιόρτασε η Ειρήνη τα γενέθλιά της;

Α. Δευτέρα **Β.** Τρίτη **Γ.** Τετάρτη **Δ.** Πέμπτη **Ε.** Παρασκευή